多元トラヒックモデルの連続化に関する予備検討

佐 藤 昌 平

A Study on Continuous-Traffic Class Model

Shohei SATO

ABSTRACT

The loss system model with multi-traffic class input has been well investigated, as shown in literature such as[1]～[3]. In the model, the number of traffic class is an integer, i.e. discrete. This study is an attempt to generalize the present model to a model with continuous-traffic class input. Laplace transformation of occupied bandwidth is derived for the model with unlimited server capacity. Inverse transformation is given superficially, which requires further study for numerical calculations.

複数呼種（トラヒッククラス）入力をもつ損失系モデルはよく知られている［1］～［3］。このモデルは多元トラヒックモデル［2］とも呼ばれている。これらのモデルでは呼種数は2，3，4，．．．という離散値をとる。

本検討では，入力呼種を u で表し，u が連続値（$0 \leqq u \leqq 1$）をとる損失系モデルを考え，このモデルにおける損失率を解析的に求める事を目標とし，その最初のステップとして，サーバーの帯域容量が無限大の場合の使用中帯域の分布を求める手法を示した。

1．連続多元トラヒックモデルの説明

呼種 u の呼は $\lambda(u)\cdot du$ の生起率でポアソン生起する。この呼は $w(u)$ の帯域を要求する。サーバーの空き帯域が $w(u)$ 以上あればこの呼は $w(u)$ の帯域を占有する。その保留時間は平均値が $1/\mu(u)$ の指数分布に従うとする。保留時間が終了するとその呼は保留していた帯域を解放しシステムから退去する。呼が生起したときに要求する帯域以上の空き帯域がサーバーに無い場合はその呼は損失となり退去する。以上のモデルをまとめれば次の通りである。

・呼種　u　は実数	$0 \leqq u \leqq 1$
・呼種　u　の発呼率	$\lambda(u)\cdot du$
・　〃　終了率	$\mu(u)$
・　〃　発呼量	$a(u)\cdot du = \{\lambda(u)/\mu(u)\}\cdot du$: $a(u)$ は連続関数とする。
・　〃　要求帯域	$w(u)$：連続関数とする。
・サーバー帯域容量	C
・損失系	

2．離散多元トラヒックモデルの場合

連続多元トラヒックモデルを考える基礎としてこれまで解析されている離散多元トラヒックモデル

受理日：平成16年9月16日

の結果を要約する。呼種 i の同時接続数を x_i, 要求帯域を m_i, 呼量を A_i とすると同時接続確率 P(・) は次のようになる［3］。

$$P(x_1,\ldots,x_k)=DA_1^{x_1}\ldots.A_k^{x_k}/(x_1!\ldots.x_k!)$$

$$D=1/\{\sum_{\Omega}A_1^{x_1}\ldots.A_k^{x_k}/(x_1!\ldots.x_k!)\} \qquad \Omega=\{(x_1,\ldots,x_k)\mid\sum_{i=1}^{k}m_ix_i\le C\} \tag{1}$$

3．連続多元トラヒックモデル

連続モデルの呼種 u を Δu 幅で区切って離散モデルで近似する。 $1/\Delta u=k$ とし $\Delta u\to 0$ とすれば，すべての i について $x_i\to 0$ or 1 であるから $x_i!\to 1$ となり，$A_i=a(i\cdot\Delta u)\Delta u$, $m_i=w(i\cdot\Delta u)$ であるから

$$P(x_1,\ldots,x_k)=DA_1^{x_1}\ldots.A_k^{x_k}$$

$$D=1/\{\sum_{\Omega}A_1^{x_1}\ldots.A_k^{x_k}\} \qquad \Omega=\{(x_1,\ldots,x_k)\mid\sum_{i=1}^{k}w(i\Delta u)x_i\le C\} \tag{2}$$

と形式的に書ける。$w(u)$ の最小値 w_{mini} が 0 より大($w_{\mathrm{mini}}>0$)であれば，$\Delta u\to 0$ としても $x_i=1$ となる i の個数は常に有限値(C/w_{mini} 以下)になるが，Ω が非可算無限集合になってしまい，これを求めることができない。従ってこの方法では式(2)から具体的な結果を得ることは困難と思われるが，$C=\infty$ の場合つまり損失が無い場合は次のような結果が得られる。

4．$C=\infty$ の場合

4．1 使用帯域幅分布のラプラス変換

この場合は呼種間の干渉がなくなることから，式(1)はポアソン分布の積になる事は明らかである。即ち

$$P(x_1,\ldots,x_k)=\exp\{-(A_1+\ldots.+A_k)\}\{A_1^{x_1}\ldots.A_k^{x_k}/(x_1!\ldots.x_k!)\} \tag{3}$$

式(3)の要素ポアソン分布の LST を $F_i^*(s)$ とする。 すなわち

$$F_i^*(s)=\exp\{-A_i(1-e^{-s})\}=\exp\{-a(i\Delta u)(1-e^{-s})\} \tag{4}$$

とおくと，呼種 i の占有する帯域幅 $jw(i\Delta u)$ の分布の LST は $F_i^*(s\cdot w(i\Delta u))$ となる(付録参照)から，

$$F_i^*(w(i\Delta u)s)=\exp\{-a(i\Delta u)\Delta u(1-\exp(-w(i\Delta u)s))\} \tag{5}$$

となり，式(3)全体に対応する占有帯域幅の分布の LST $Y(s)$ は式(5)の積になる。即ち

$$\begin{aligned}Y(s)&=\prod_1^{\infty}F_i^*(w(i\Delta u)s)=\exp\{-\sum_1^{\infty}[a(i\Delta u)\Delta u(1-\exp(-w(i\Delta u)s)]\}\\&=\exp\{-\textstyle\int_0^1 a(u)(1-\exp(-w(u)s))du\}=\exp\{-A+\textstyle\int_0^1 a(u)\exp(-w(u)s)du\}\\&=\exp(-A)\exp\{\textstyle\int_0^1 a(u)\exp(-w(u)s)du\};\quad A=\textstyle\int_0^1 a(u)du\end{aligned} \tag{6}$$

ちなみに式(6)を s について微分し $s=0$ とおけば，平均占有帯域幅になる筈である。それは下記の式となり，平均占有帯域幅になっている。

$$\lim_{s \to 0}(-Y'(s))=\int_0^1 a(u)w(u)du \tag{7}$$

また，$w(u)=\mathrm{const}=w_0$ であるならば，これは単一呼種モデルとなるはずである。式(6)を使ってこれを検証すると，

$$Y(s)=\exp(-A)\exp\{\textstyle\int_0^1 a(u)\exp(-w(u)s)du\}=\exp(-A)\exp\{\int_0^1 a(u)\exp(-w_0 s)du\}$$

$$=\exp(-A)\exp\{\exp(-w_0 s)\textstyle\int_0^1 a(u)du\}=\exp(-A)\exp\{A\ \exp(-w_0 s)\}$$

$$=\exp(-A(1-e^{-w_0 s})) \tag{8}$$

となって，単一呼種モデルの使用中帯域幅の LST になっていることが判る。

4．2　使用帯域幅分布・・・一般形

$Y(s)$ の逆変換を求める。

先ず　$v=w(u)$，　$u=w^{-1}(v)$，　$v_0=w(0)$，　$v_1=w(1)$　と置くと，

$du=w^{-1\prime}(v)dv$ だから

$$Y(s)=\exp(-A)\exp\{\int_{v0}^{v1} a(w^{-1}(v))w^{-1\prime}(v)\exp(-vs)dv\}; \tag{9}$$

を得る。

$a(w^{-1}(v))w^{-1\prime}(v)=0 \qquad v<v_0,\quad v_1<v$

とし

$$B(s)=\int_{v_0}^{v_1} a(w^{-1}(v))w^{-1\prime}(v)\exp(-vs)dv=\int_0^\infty a(w^{-1}(v))w^{-1\prime}(v)\exp(-vs)dv$$

と置くと，式(9)は

$$Y(s)=\exp(-A)\exp\{B(s)\}=\exp(-A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(B(s))^n}{n!} \tag{10}$$

$B(s)$ の逆変換を $b(v)$ とすれば，$b(v)=a(w^{-1}(v))w^{-1\prime}(v)$ である。

式(10)を形式的に逆変換すれば

$$y(v)=\exp(-A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b(v)^{*n}}{n!} \tag{11}$$

ここに $b(v)^{*n}$ は n 回畳込みをあらわす。

使用中帯域の分布は一般的には式(11)のように書けるが，その具体的な形は $b(v)$ を与えないと定まらない。次の節で一例について議論する。

4．3　使用帯域幅分布・・・例

$a(u)=a_1u+a_0$，　$w(u)=w_1u+w_0$，　$(a(u), w_1, w_0>0)$ の場合を考える。この時

$$b\,(v)=\frac{a_1}{w_1^2}v+\frac{1}{w_1}(a_0-\frac{w_0}{w_1}a_1),\quad w_0\le v\le w_0+w_1 \tag{12}$$

$$A=\int_0^1 a\,(u)\,du=\frac{1}{2}a_1+a_0 \tag{13}$$

である。さらに発生呼量が呼種に依存せず一定の場合は，$a_1=0$ であるから，$b\,(v)$,A,$B\,(s)$ は次のように簡単になる。

$$b\,(v)=\frac{a_0}{w_1},\quad w_0\le v\le w_0+w_1 \tag{14}$$

$$A=\int_0^1 a\,(u)\,du=a_0 \tag{15}$$

$$B\,(s)=\frac{a_0}{w_1}\frac{e^{-w_0s}-e^{-(w_0+w_1)s}}{s} \tag{16}$$

式(14)(15)を(11)に入れれば，使用中帯域分布 $y\,(v)$ が求まるわけであるが，この様な簡単な場合でも式(11)を具体的に数値計算してグラフ化することは，更なる工夫が必要であり今後の課題とする。

式(14)～(16)に対応するラプラス変換 $Y\,(s)$ を今後の参考の為に示しておく。

$$Y\,(s)=\exp(-a_0)\exp\{B\,(s)\}=\exp(-a_0)\exp\{\frac{a_0}{w_1}\frac{e^{-w_0s}-e^{-(w_0+w_1)s}}{s}\}$$

$$=\exp(-a_0)\exp\{\frac{a_0}{w_1}\frac{e^{-w_0s}}{s}\}\exp\{-\frac{a_0}{w_1}\frac{e^{-(w_0+w_1)s}}{s}\}$$

5．まとめ

本検討では，入力呼種 u が連続値をとる損失モデル解析の最初のステップとしてサーバー容量が無限大の場合について，使用中帯域幅分布の LST の一般形と，その形式的な逆変換を示した。この結果を具体的なモデルに適用する為の工夫と，サーバー容量有限の場合の損失率を求めるという本来の問題の解決は今後の課題である。

参考文献

[1] 藤木，雁部，“通信トラヒック理論”，丸善，1980.
[2] 秋丸，川島，“情報通信トラヒック”，電気通信協会，1990
[3] 林，“異速度呼混在の即時系モデルにおける計算アルゴリズムとその近似計算法”，信学論 VOL.J85−B NO.5，2002.5

（佐藤　昌平：四国大学　情報科学研究室）

付録：同時接続数がポアソン分布に従うときの全占有帯域幅分布のラプラス変換

生起呼量を a，一つの呼が占有する帯域を w とするとき，全占有帯域幅の密度関数は

$$f\,(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\delta\,(t-rw)\frac{a^r}{r!}e^{-a}$$

だからそのラプラス変換は次の通りである。

$$F^*(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\sum_{r=0}^{\infty}\delta\,(t-rw)\frac{a^r}{r!}e^{-a}dt=e^{-a}\sum_{r=0}^{\infty}e^{-srw}\frac{a^r}{r!}=e^{-a}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(ae^{-sw})^r}{r!}=\exp(-a\,(1-e^{-sw}))$$